Steady state analys

Effekt av sparförändring och grad av avtagande marginalavkastning.

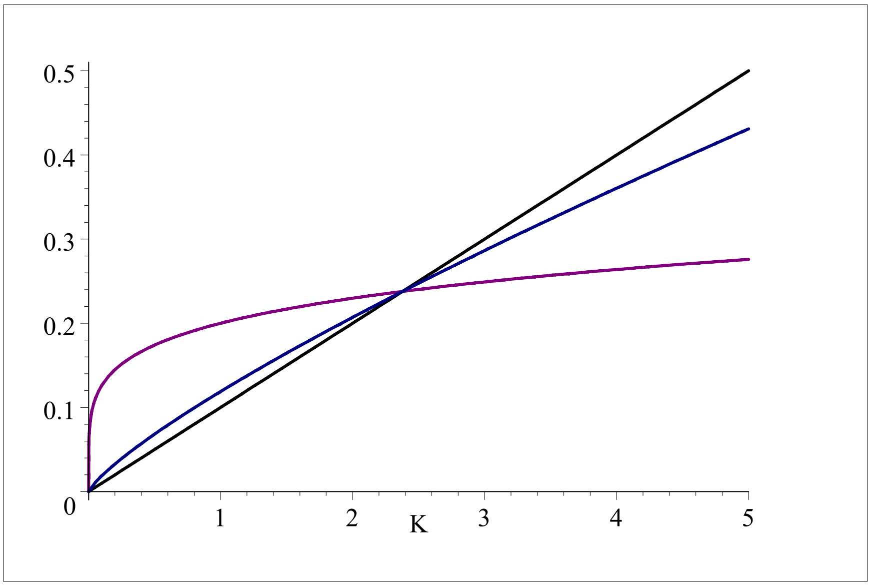
Låt oss jämföra effekten av en ökning i sparandet i en ekonomi med hög grad av avtagande marginalavkastning med en med låg grad. Antag att ekonomierna är i steady state vid 20% sparkvot och att de vid detta sparande har samma kapitalstock per capita och samma BNP/capita. Mera specifikt, antag att land 1 har en produktion per arbetare som ges av

$$f\left(\frac{K}{N}\right) = \left(\frac{K}{N}\right)^{0.2}$$

medan det i land 2 ges av ,

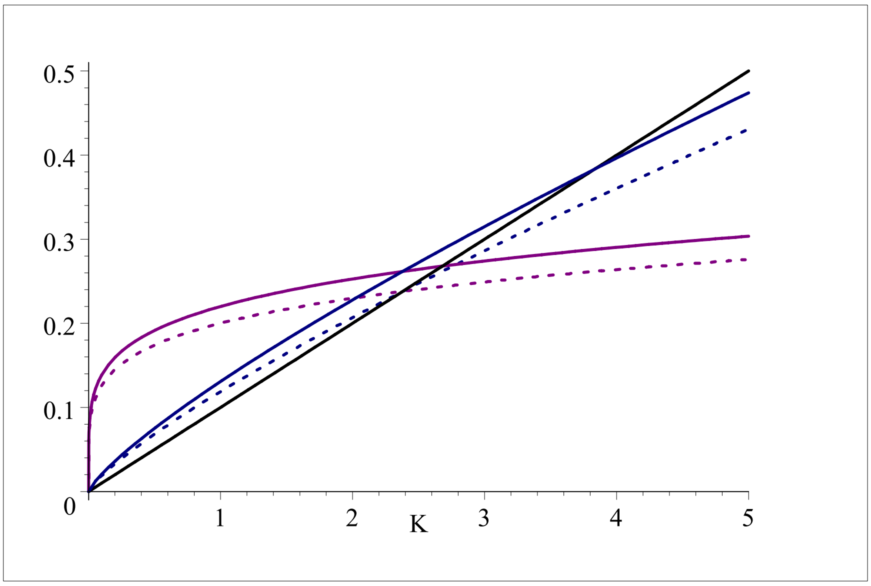
$$f\left(\frac{K}{N}\right) = A\left(\frac{K}{N}\right)^{0.8}$$

A är en produktivitetsparameter som jag väljer så att produktion per arbetare är densamma i de båda länderna i steady state vid 20% sparande. Detta är fallet när $A = 0.5946$. Normalisera $N = 1$ och sätt $\delta = 0.1$. Då kan vi rita investeringskurvorna och deprecieringskurvan som följer



Den lila kurvan representerar investeringarna per arbetare i land 1 och den blå investeringarna per arbetare i land 2. Vi finner att $K/N = 2.378$ i steady state.

Antag nu att sparandet går upp till 22%. Detta skiftar upp båda kurvorna som visas i nästa figur där de heldragna (prickade) kurvorna är de nya (gamla) investeringskurvorna.



Som vi ser ökar värdet på K/N i steady-state i båda länderna. I land 1 från $K/N = 2.378$ till $K = 2.6793$ dvs med

$$\frac{2.6793 - 2.378}{2.378} = 12.67\%.$$

I land 2, ökar den med

$$\frac{3.8303 - 2.378}{2.378} = 61.07\%.$$

BNP per arbetare i steady-state före och efter ändringen i sparande I land 1 är

$$\left(\frac{2.378}{N}\right)^{0.2} = 1.1892 \text{ respektive}$$

$$\left(\frac{2.6793}{N}\right)^{0.2} = 1.2179$$

innebärande en ökning med

$$\frac{1.2179 - 1.1892}{1.1892} = 2.41\%.$$

I land 2 är motsvarande siffror

$$A\left(\frac{2.378}{N}\right)^{0.8} = 1.1892 \text{ respektive}$$

$$A\left(\frac{3.8303}{N}\right)^{0.8} = 1.741$$

innebärande en ökning med

$$\frac{1.741 - 1.1892}{1.1892} = 46.4\%.$$

Slutsatsen blir att i ett land med mindre snabbt avtagande marginalavkastning blir effekten av en förändring i sparandet på BNP/capita större än i land med snabbare avtagande marginalavkastning. Det betyder också att anpassningsfasen tar längre tid i det första fallet.

Golden rule

Antag som ovan att produktion per arbetare är

$$f\left(\frac{K}{N}\right) = \left(\frac{K}{N}\right)^{\alpha}$$

för $0 < \alpha < 1$. För att förenkla, normaliser $N = 1$. I steady state är investeringarna lika med deprecieringen, dvs

$$s(K^*)^{\alpha} = \delta K^*.$$

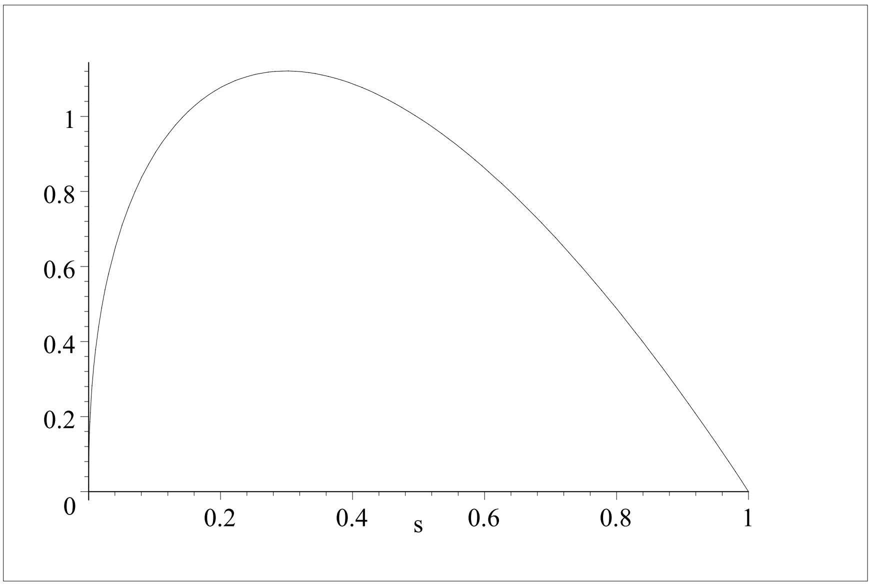
, Solution is: $\left\{K = e^{-\frac{\ln \frac{s}{\delta}}{\alpha-1}} = \frac{s}{\delta}^{\frac{1}{1-\alpha}}\right\}, \{K = 0\}$ is true, Solution is: $\left\{K = \exp\left(-1.0\frac{\ln 10.0s}{\alpha-1.0}\right)\right\}, \{K = 0\}$, Solution is: $\{K = 0\}$Detta kan vi lösa för K^*, vilket ger

$$K^* = \frac{s}{\delta}^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

Antag nu att vi vill maximera konsumtionen i steady state, dvs välja s så att konsumtionen är så hög så möjligt i steady state, dvs vi ska hitta s_G. Låt oss kalla denna konsumtionsnivå C^*. Om sparandet per arbetare är $sf(\frac{K}{N})$ så är konsumtionen det som är kvar av produktionen, dvs $(1-s)f(\frac{K}{N})$. C^* ges därför av

$$C^* = (1-s)f\left(\frac{K^*}{N}\right) = (1-s)\left(\frac{K^*}{N}\right)^{\alpha} = (1-s)\left(\frac{s}{\delta}^{\frac{1}{1-\alpha}}\right)^{\alpha} = (1-s)\frac{s}{\delta}^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

Vi kan rita C^* som en funktion av s



Konsumtion per arbetare i steady state för $\alpha = 0.3$ och $\delta =$

För att få fram maximum tar vi första ordningens villkor

$$\frac{\partial\left((1-s)\frac{s}{\delta}^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\right)}{\partial s} = 0$$

vilket ger att $s_G = \alpha$. Detta är alltså vårt sparande enligt *gyllene regeln.*

Låt oss nu gå vidare och anta att det finns tillväxt i A och N, med g_A respektive g_N. Balanserad tillväxt nås då när investeringarna per effektiv arbetskraftsenhet är lika med investeringsbehoven. Dvs när

$$sf\left(\frac{K}{AN}\right) = (\delta + g_A + g_N)\frac{K}{AN}$$
$$s\left(\frac{K}{AN}\right)^{\alpha} = (\delta + g_A + g_N)\frac{K}{AN}.$$

Detta innebär att i steady state är kapitalstocken per effektiv arbetskraftsenhet

$$\frac{K}{AN} = \left(\frac{s}{\delta + g_A + g_N}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \equiv \frac{K^*}{AN}.$$

Konsumtionen per effektiv arbetskraftsenhet i steady state är

$$C^* = (1-s)f\left(\frac{K^*}{AN}\right) = (1-s)\left(\frac{K^*}{AN}\right)^{\alpha} = (1-s)\left(\frac{s}{\delta + g_A + g_N}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

På samma sätt som tidigare kan vi räkna ut konsumtionen per effektiv

arbetskraftsenhet genom att lösa första ordningens villkor.

$$\frac{\partial\left((1-s)\left(\frac{s}{\delta+g_A+g_N}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\right)}{\partial s} = 0$$

och vi får igen att $s_G = \alpha$ ger maximal konsumtion per arbetskraftsenhet.

Låt oss nu räkna ut marginalproduktiviteten hos kapitalet i steady state

$$\begin{aligned} f'\left(\frac{K^*}{AN}\right) &= \alpha\left(\frac{K^*}{AN}\right)^{\alpha-1} \\ &= \alpha\left(\left(\frac{s_G}{\delta + g_A + g_N}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\right)^{\alpha-1} \\ &= \delta + g_A + g_N \end{aligned}$$

Som vi ser är marginalprodukten minus avdrag för deprecieringstakten lika med

summan av teknologisk tillväxttakt och befolkningstillväxttakt.

Om vi bortsett från riskpremier bör aktiemarknadsavkastningen vara just $f'\left(\frac{K}{AN}\right) - \delta$.

Notera att om sparandet skulle vara högre än $s_G = \alpha$ är marginalavkastningen lägre. Vår slutsats är alltså att om avkastningen på aktiemarknaden är mindre än summan av teknologisk tillväxttakt och befolkningstillväxttakt är vi på FEL sida om s_G. Konsumtionen kan då öka i alla tidsperioder genom att sparandet går ned.